

Analysis III

ÜBUNGSBLATT 7

1. Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ ein Unterraum, so sind die Borel-Mengen von Y die Schnitte von Y mit den Borel-Mengen von X .
2. (i) Seien $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}' \subset \mathcal{P}(X)$ Halbringe, μ ein Inhalt auf $\mathcal{H}$ und μ' ein Inhalt auf $\mathcal{H}'$. Falls $\mu'|_{\mathcal{H}} \leq \mu$, so gilt $(\mu')^* \leq \mu^*$.
(ii) Ist $\mu^*|_{\mathcal{H}'}$ ein Inhalt, so gilt $(\mu^*|_{\mathcal{H}'})^* = \mu^*$.
(iii) Es gilt $(\mu^*|_{\mathcal{H}})^* = (\mu^*|_{\mathcal{R}})^* = \mu^*$, wobei $\mathcal{R}$ den von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring bezeichnet.
(iv) $(\lambda_{\mathcal{F}^d}^d)^* = (\beta^d)^*$.
3. Die Borel-Maße μ auf $\mathbb{R}$ entsprechen bijektiv den linksseitig stetigen, schwach monoton wachsenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ modulo additiver Konstanten via

$$\mu([a, b)) = f(b) - f(a)$$

für $a \leq b$.

Erklärung: Ein Borel-Maß auf einem Hausdorffschen topologischen Raum ist ein Maß auf der σ -Algebra der Borel-Mengen, so dass jeder Punkt eine Umgebung mit endlichem Maß besitzt.

Anmerkung: Sie können die Aussagen aus Aufgabe 5 auf Blatt 3 verwenden.

4. *Bernoulli-Experiment zum Münzwurf.*

Sei $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ der Raum aller Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0, 1\}$. Wir bezeichnen mit $\pi_k : X \rightarrow \{0, 1\}$ die natürliche Projektion gegeben durch $\pi_k((a_n)) = a_k$. Wir versehen $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie und X mit der Produkttopologie, dh mit der größten Topologie $\mathcal{T}$, so dass alle Projektionen π_k stetig sind.

Sei $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}(X)$ die Familie der Zylindermengen $\pi_k^{-1}(b)$ mit $b \in \{0, 1\}$ und $k \in \mathbb{N}$. Sei weiter $\mathcal{H}$ die Familie der endlichen Durchschnitte von Zylindermengen sowie $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{H}$ erzeugte Ring und $\mathcal{B}$ die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ -Algebra auf X .

Zeigen Sie:

- (i) $\mathcal{H}$ ist ein Halbring.
- (ii) Die Teilmengen in $\mathcal{R}$ sind genau die Urbilder unter den natürlichen Projektionen $(\pi_1, \dots, \pi_k) : X \rightarrow \{0, 1\}^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\mathcal{R}$ eine abzählbare Algebra.
- (iii) Der Halbring $\mathcal{H}$ ist eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$.
- (iv) $\mathcal{B}$ ist die von $\mathcal{T}$ erzeugte Borelsche σ -Algebra.
- (v) Die natürliche Bijektion $\beta : X \rightarrow C$ auf die Cantor-Menge $C \subset [0, 1]$ (vgl Analysis I, Blatt 11) gegeben durch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ ist ein Homöomorphismus.

(vi) Der Ring $\mathcal{R}$ erfüllt die *absteigende Kettenbedingung*: Für eine absteigende Folge $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen $R_n \in \mathcal{R}$ mit $R_n \searrow \emptyset$ gilt $R_n = \emptyset$ für große n .

Hinweis: Kompaktheit.

(vii) Jeder endliche Inhalt auf $\mathcal{R}$ ist ein Prämaß und setzt sich eindeutig zu einem Borel-Maß auf X fort.

(viii) *Fairer Münzwurf*. Es existiert ein eindeutiges (Wahrscheinlichkeits)Maß μ auf $\mathcal{B}$ mit $\mu(\pi_k^{-1}(b)) = \frac{1}{2}$ für alle b, k .

Wenn Sie Ihre Übungen bis Freitag dem 8.12.2023 um 16:00 Uhr in Moodle einreichen, versuchen wir Ihnen zu möglichst vielen Ihrer Abgaben eine Rückmeldung zu geben. Bitte benennen Sie die Datei als B7_Name1_Name2, wenn Sie z.B. zu zweit abgeben, wobei Name1 der Nachname der einreichenden Person sein sollte.

Aufgabe 1

1. Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ ein Unterraum, so sind die Borel-Mengen von Y die Schnitte von Y mit den Borel-Mengen von X .

(X, τ) topologischer Raum, $Y \subset X$ Unterraum

(mit Teilraumtopologie $\tau' = \{O \cap Y \mid O \in \tau\} = (*)$)

Beh. $\mathcal{B}(\tau') = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}(\tau)\}$

Beweis: Beachte $i: Y \hookrightarrow X$ stetig

$$(*) = i^*(\mathcal{B}(\tau)) \subseteq \mathcal{B}(\tau')$$

$$\stackrel{''\subseteq''}{=} \tau' \subseteq (*) \text{ (da } \tau \subseteq \mathcal{B}(\tau)\text{)}.$$

Beh. $(*)$ ist σ -Algebra ($\Rightarrow \mathcal{B}(\tau') \subseteq (*)$)

zu 1): $(*) = \mathcal{B}(\tau)|_Y$ ist Spur σ -Algebra 

Aufgabe 2:

2. (i) Seien $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}' \subset \mathcal{P}(X)$ Halbringe, μ ein Inhalt auf $\mathcal{H}$ und μ' ein Inhalt auf $\mathcal{H}'$.
 Falls $\mu'|_{\mathcal{H}} \leq \mu$, so gilt $(\mu')^* \leq \mu^*$.
 (ii) Ist $\mu^*|_{\mathcal{H}'}$ ein Inhalt, so gilt $(\mu^*|_{\mathcal{H}'})^* = \mu^*$.
 (iii) Es gilt $(\mu^*|_{\mathcal{H}})^* = (\mu^*|_{\mathcal{R}})^* = \mu^*$, wobei $\mathcal{R}$ den von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring bezeichnet.
 (iv) $(\lambda_{\mathcal{F},d}^d)^* = (\beta^d)^*$.

(i) $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}' \subset \mathcal{P}(X)$ Halbringe, μ Inhalt auf $\mathcal{H}$ μ' Inhalt auf $\mathcal{H}'$

Beh: (*) $\mu'|_{\mathcal{H}} \leq \mu \Rightarrow (\mu')^* \leq \mu^*$

Beweis: $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}' \Rightarrow (\mu')^* \leq (\mu'|_{\mathcal{H}})^*$

$$(*) \Rightarrow (\mu'|_{\mathcal{H}})^* \leq \mu^*$$

$$\Rightarrow (\mu')^* \leq \mu^*$$

ii) Sei $\mu^*|_{\mathcal{H}'}$ ein Inhalt.

Beh: $(\mu^*|_{\mathcal{H}'})^* = \mu^*$

Bew:

$$" \leq ": (\mu^*|_{\mathcal{H}'})|_{\mathcal{H}} = \mu^*|_{\mathcal{H}} \leq \mu$$

$$\stackrel{(i)}{\Rightarrow} (\mu^*|_{\mathcal{H}'})^* \leq \mu^*$$

" $\geq$ ": Sei nun $M \subset X$ u. exo bel. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\overset{\mathcal{H}'}{\cup}$ Überdeckung

von M , s.d. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*|_{\mathcal{H}'}(A_n) \leq (\mu^*|_{\mathcal{H}'})^*(M) + \varepsilon$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle Überdeckung $(B_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ $\overset{\mathcal{H}}{\cup}$

von A_n mit $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\leadsto (B_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ ist Überdeckung von M .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu^*(U) &\leq \sum_{n,k} \mu(B_{n,k}) \leq \sum_n \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &\leq \left(\mu^*_{|\mathcal{H}'}(U) \right)^* + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^* \leq \left(\mu^*_{|\mathcal{H}'} \right)^* \quad \blacksquare$$

(iii) Sei nun $\mathcal{H}' = \mathcal{R}(\mathcal{H})$. Dann ist $\mu^*_{|\mathcal{R}}$ ein Inhalt
(vgl. Aufgabe zur partiellen Additivität)

Beh: $(\mu^*_{|\mathcal{H}})^* = (\mu^*_{|\mathcal{R}})^* = \mu^*$

Beweis: Folgt aus ii) mit $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}' = \mathcal{R}$

(iv) Beh: $(\lambda_{\mathcal{F}^d})^* = (\mathcal{B}^d)^*$
 $\nearrow$
 (Halb)ring der Figuren
 in $\mathbb{R}^d$

Beweis: Wähle

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}^d, \mathcal{H}' = \mathcal{B}^d$$

$$\mu = \lambda_{\mathcal{F}^d}$$

Vorlesung: $\mu^*_{|\mathcal{B}^d}$ ist Maß also Inhalt.

Wende (iii) an

Aufgabe 3:

3. Die Borel-Maße μ auf $\mathbb{R}$ entsprechen bijektiv den linksseitig stetigen, schwach monoton wachsenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ modulo additiver Konstanten via

$$\mu([a, b)) = f(b) - f(a)$$

für $a \leq b$.

Erklärung: Ein Borel-Maß auf einem Hausdorffschen topologischen Raum ist ein Maß auf der σ -Algebra der Borel-Mengen, so dass jeder Punkt eine Umgebung mit endlichem Maß besitzt.

Anmerkung: Sie können die Aussagen aus Aufgabe 5 auf Blatt 3 verwenden.

Wir haben bereits gesehen:

$$\text{Inhalt } \mu: I = \mathbb{Q}^1 \rightarrow [0, \infty) \xleftrightarrow{1:1} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \begin{array}{l} \text{monoton} \\ \text{steigend} \end{array} / \text{additive Konstante}$$

$$(f(b) - f(a) \leftarrow [a, b): \mu) \leftarrow f$$

Ferner gilt: (*) μ Prämaß $\Leftrightarrow f$ linksseitig stetig.

Beh. Borel-Maße auf $\mathbb{R} \xleftrightarrow{1:1} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend
linksseitig stetig

" $\rightarrow$ Sei μ Borel-Maß auf $\mathbb{R}$, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}$ top. Hausdorff-Raum

gibt es eine Umg. U_x mit $\mu(U_x) < \infty$

$\leadsto \mu|_I$ ist Prämaß

zu zeigen: $\forall [a, b) \in I$ gilt $\mu|_I([a, b)) < \infty$

$\mu|_I$ Borel-Maß $\rightarrow \forall x \in [a, b) \exists U_x$ offen Umg. von x mit $\mu(U_x) < \infty$

$\leadsto (U_x)_{x \in [a, b)}$ offene Überdeckung von $[a, b)$

$[a, b)$ kompakt $\rightarrow \exists$ endl. Teilüberdeckung $(U_{x_j})_{j \in J}$ von $[a, b)$

$$\Rightarrow \mu|_I([a, b)) = \mu([a, b)) \stackrel{\text{Monotonie}}{\leq} \mu\left(\bigcup_{j \in J} U_{x_j}\right)$$

$$\stackrel{\text{Subadd.}}{\leq} \sum_{j \in J} \underbrace{\mu(U_j)}_{< \infty} < \infty$$

Jetzt weiter mit alter Aufgabe.

" $\leftarrow$ " Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linksseitig stetig, monoton wachsend

alte Aufg. Prämaß $\mu: \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)$

Fortsetzungssatz
Caratheodory $\rightarrow \exists!$ Fortsetzung $\bar{\mu}: \mathcal{B}^1 \rightarrow [0, \infty]$
 $\uparrow$ μ ist σ -endlich, damit folgt die Eindeutigkeit aus Vorlesung

Bleibt zu zeigen: $\bar{\mu}$ ist Borel-Maß

$\forall x \in \mathbb{R} \exists$ Intervall $[a, b)$, s.d. $x \in (a, b)$

$\leadsto [a, b)$ ist Umgebung von x und $\bar{\mu}([a, b))$

$$= \mu([a, b)) = f(b) - f(a) < \infty$$

Notiz: Lebesgue-Borel-Maß: eindeutige Fortsetzung von $\lambda_{\mathbb{R}^d}^d$ auf die Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}^d$

• Borel-Maß: Allg. Begriff für ein Maß μ auf einen topol.

Hausdorff-Raum X , s.d. $\forall x \in X \exists$ Umg. U von x mit $\mu(U) < \infty$

Beachte: Lebesgue-Borel-Maß ist ein Borel-Maß.

Aufgabe 4: Einmaliger fairer Münzwurf modelliert durch
 $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ s.d. $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$.

Jetzt: $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\pi_k: X \rightarrow \{0, 1\}$ Projektionen auf k -ten Faktor

X trägt natürliche Strukturen ($\{0, 1\}$ versehen mit der
diskreten Topologie,
d.h. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\{0, 1\})$)

• Produkttopologie, d.h. die größte (wenigsten offenen
Mengen) Topologie, s.d. alle π_k stetig.

$\mathcal{P}(X) \supseteq \mathcal{Z}$ Zylindermengen, d.h. Mengen der Form $\pi_k^{-1}(b)$
für $b \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{N}$

(Produkt σ -Algebra, d.h. die kleinste σ -Algebra
s.d. alle π_k messbar sind $\rightarrow$ Zylindermengen sind messbar)

$\mathcal{H}$ = Menge von endlichen Durchschnitten von Zylindermengen

(i) Beh.: $\mathcal{H}$ ist ein Halbring

Beweis: $\emptyset = \pi_k^{-1}(0) \cap \pi_k^{-1}(1) \quad \checkmark$

$\cap$ -stabil: klar aus Def.

Seien $H, H' \in \mathcal{H}$, betrachte $H \setminus H'$

$\exists k$, s.d. $H = (\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_s})^{-1}(b_{i_1}, \dots, b_{i_s})$ wobei $i_1 < \dots < i_s < \mathbb{N}$
 $b_{i_k} \in \{0, 1\}$

Analog $H' = \dots$

$$\{0,1\}^N = \{0,1\}^k \times \{0,1\}^N \xrightarrow{\pi} \{0,1\}^k$$

$$H = \pi^{-1} \left((\pi_{i_1}|_{\{0,1\}^k}, \pi_{i_2}|_{\{0,1\}^k})^{-1}(b_{i_1}, b_{i_2}) \right)$$

In $\{0,1\}^k$ gilt die Beh., damit auch in $\{0,1\}^N$, da

$$\pi^{-1}(A \cap B) = \pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(B) \quad \pi^{-1}(A \setminus B) = \pi^{-1}(A) \setminus \pi^{-1}(B)$$

ii) $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{H})$
Beh. Alle Teilmengen in $\mathcal{R}$ sind von der Form $(\pi_1, \dots, \pi_k)^{-1}(A)$ für ein $A \subset \{0,1\}^k$.
Beweis. Jede Menge der Form $(\pi_1, \dots, \pi_k)^{-1}(A)$ ist endliche Vereinigung von Zylindermengen und damit in $\mathcal{R}$.
 Umgekehrt bilden die Mengen dieser Gestalt einen Ring der $\mathcal{H}$ enthält, also ist jede Menge in $\mathcal{R}$ von dieser Gestalt.

(iii) Beh. $\mathcal{H}$ ist eine Basis der (Produkt-)topologie $\mathcal{T}$.
 $\Rightarrow$ Vereinigungen aus Mengen aus $\mathcal{H}$ liegen sie in $\mathcal{T}$. kleinste Topologie, die $\mathcal{H}$ enthält.
 Zu zeigen: Jede Menge aus $\mathcal{T}$ lässt sich schreiben als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{H}$.
 Dazu betrachte $\mathcal{H} \subset \mathcal{T}' = \left\{ \bigcup_{h \in \mathcal{H}} h \mid \mathcal{H} \subset \mathcal{T} \right\} \subset \mathcal{T}$
 Zeige: $\mathcal{T}'$ ist Topologie, z.B. $\left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}} h \right) \cap \left(\bigcup_{h' \in \mathcal{H}} h' \right) = \bigcup_{h \in \mathcal{H}} (h \cap h')$
 $= \left\{ \bigcup_{h \in \mathcal{H}} h \mid \mathcal{H} = \{h \cap h' \mid h, h' \in \mathcal{H}\} \right\} \subset \mathcal{H}$